1

Enseignant.e.s: Dovi, Huruguen, Maatouk
Géométrie Analytique - CMS
5 novembre 2024
Durée : 105 minutes

Dalton Joe

SCIPER : **987654**

Signature .... Absent

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 34 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table, **vérifiez** votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page et apposez votre **signature**.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

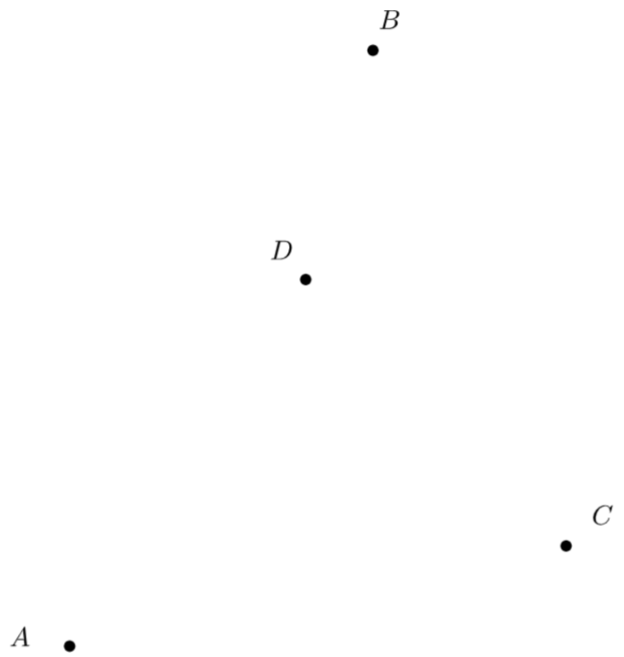
choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1,2 et 3** on donne le dessin suivant (sur lequel vous pouvez écrire) :



Question 1 (2 points) Sélectionner l'affirmation correcte, sachant que λ est défini par :

$$\lambda = \frac{\|\alpha\overrightarrow{DA}\|}{\|\beta\overrightarrow{DC}\|}, \quad \text{où } \overrightarrow{DB} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DC}.$$

☐ $\lambda < \frac{1}{2}$ ■ $2 < \lambda$ ☐ $1 < \lambda < 2$ ☐ $\frac{1}{2} < \lambda < 1$

Question 2 (2 points) Une des affirmations ci-dessous est vraie. Laquelle ?

☐ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < 0 < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$
☐ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} < 0 < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
☐ $0 < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
☐ $0 < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$
■ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$
☐ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} < 0$

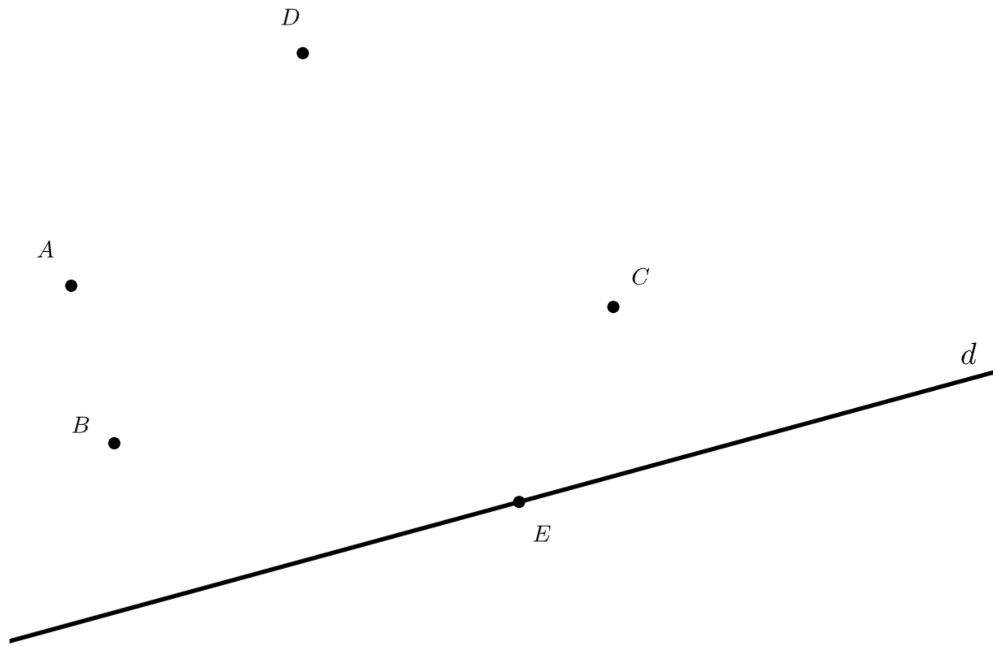
Question 3 (2 points) Soit I le point vérifiant :

$$\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AD}.$$

Parmi les points suivants, lequel est le plus éloigné de I ?

■ B ☐ A ☐ C ☐ D

Pour les **Questions 4,5 et 6** on donne le dessin suivant (sur lequel vous pouvez écrire) :



Question 4 (2 points) Une des équations vectorielles suivantes décrit d. Laquelle ?

- [ ] $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ED} + t\overrightarrow{BC}\,,\ t \in \mathbb{R}$
- [ ] $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{CD}\,,\ t \in \mathbb{R}$
- [x] $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3t\overrightarrow{CB}\,,\ t \in \mathbb{R}$
- [ ] $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BE} + t\overrightarrow{EC}\,,\ t \in \mathbb{R}$

Question 5 (2 points) Sachant que $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, sélectionner l'équation normale qui décrit d.

- [ ] $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- [ ] $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$
- [ ] $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{CB} = 4$
- [x] $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BA} = -12$

Question 6 (2 points) Une des équations suivantes décrit une droite passant par le point D. Laquelle ?

- [ ] $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{CD}\,,\ t \in \mathbb{R}$
- [ ] $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$
- [ ] $\overrightarrow{EM} = 5t\overrightarrow{BA}\,,\ t \in \mathbb{R}$
- [x] $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE}$

Deuxième partie, 1 question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Dans cette question, on ne demande que les réponses finales, sans développement. Aucune justification ne sera prise en compte.

Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifiant :

$$||\vec{i}|| = \sqrt{2},\ ||\vec{j}|| = 3,\ \text{angle entre } \vec{i} \text{ et } \vec{j} = \frac{3\pi}{4}.$$

On donne aussi les points suivants :

$$A(1,0), B(0,1) \text{ et } C(1,1).$$

(a) Quelle est la norme de $||\overrightarrow{AB}||$?

Dans le repère $\mathcal{R}$ on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ si bien que } \overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}.$$

On en déduit :

$$||\overrightarrow{AB}||^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (-\vec{i} + \vec{j})\cdot(-\vec{i} + \vec{j}) = ||\vec{i}||^2 + ||\vec{j}||^2 - 2\vec{i}\cdot\vec{j},$$

puis enfin :

$$||\overrightarrow{AB}||^2 = 2 + 9 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} = 17$$

On en conclut que $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{17}$.

(b) Quelles sont les coordonnées de C dans le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$?

Il faut trouver les réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AC} = x(\vec{i} + \vec{j}) + y(\vec{i} - \vec{j}) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}.$$

Or

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{i} + \vec{i} + \vec{j} = \vec{j}.$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de C dans $\mathcal{R}'$ sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$.

(c) Soit I le milieu de OB. Donnez des équations paramétriques de (CI) dans $\mathcal{R}$.

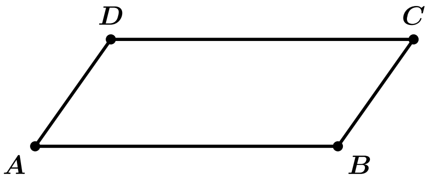
Dans $\mathcal{R}$, $I(0,1/2)$ et $C(1,1)$. La droite (CI) est dirigée par $\overrightarrow{IC}\binom{1}{1/2}$ et passe par $I(0,1/2)$. Elle admet donc pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}.$$

Question 8: *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CB}$.



(a) Exprimez algébriquement $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$, c'est-à-dire trouvez les réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{DE}.$$

(b) Sur le dessin ci-dessus, placez E et représentez $p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{DE})$ en projetant $\overrightarrow{DE}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

(c) On donne maintenant les informations additionnelles suivantes :

$$||\overrightarrow{AB}|| = 2,\ ||\overrightarrow{AD}|| = 1,\ \text{ angle entre } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \frac{\pi}{3}.$$

Exprimez $p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{DE})$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Solution

(a) On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$$

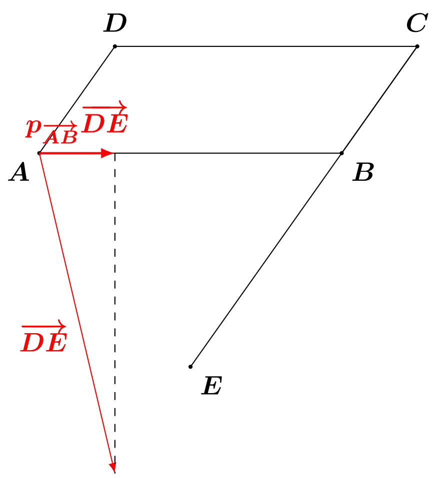
avec $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AB}$. Donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AB}\right)$$

et finalement

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DE}.$$

(b)



(c) On a

$$p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{DE}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}}{||\overrightarrow{AB}||^2}\overrightarrow{AB}.$$

Or

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE},$$

avec $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = ||\overrightarrow{AB}||^2 = 4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE} = -3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -3(2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}) = -3$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = 1$. On obtient donc

$$p_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{DE}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Question 9: *Cette question est notée sur 10 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6 .5 7 .5 8 .5 9 .5 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On considère un triangle ABC dont on note I le milieu de AB, h la hauteur issue de C et m la médiane issue de C. On sait que :

$$A(-9,-1)\,, \quad h : \begin{cases} x = -4+t \\ y = -6+3t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad m : y = 13x - 4\,.$$

(a) Déterminer les coordonnées de C.

(b) Trouver les coordonnées de I puis en déduire celles de B.

(c) Déterminer un point M appartenant à (BC) sachant que :

$$\text{Aire}(IBM) = \frac{1}{12}\text{Aire}(ABC)$$

et que l'abscisse de M est inférieure à 8.

Solution

(a) Cherchons tout d'abord les coordonnées de C.

$\{C\} = m \cap h$:

$-6+3t = 13(-4+t)-4$

$-6+3t = -52+13t-4$

$10t = 50$

$t = 5$

d'où

$$x = -4+5 = 1$$

et

$$y = -6+3(5) = 9$$

et donc

$$C(1,9).$$

(b) Cherchons ensuite les coordonnées de I.

Equation de $(AB) \perp h$ passant par A:
Vecteur directeur de h :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vecteur directeur de (AB) :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB) : \begin{cases} x = -9-3t \\ y = -1+t \end{cases}$$

$\{I\} = (AB) \cap m$:

$-1+t=13(-9-3t)-4$

$-1+t=-117-39t-4$

$40t=-120$

$t=-3$

d'où

$$x=-9-3(-3)=0$$

et

$$y=-1+(-3)=-4$$

et donc

$$I(0,-4).$$

Déduisons-en les coordonnées de B:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix}-9\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-7\end{pmatrix}$$

D'où

$$B(9,-7).$$

(c)

$$\text{Aire } \Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$$

avec

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}18\\-6\end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}18 & 10\\-6 & 10\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|180-(-60)\right|=120$$

$M\in(BC)\,,\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-8\\16\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et on a :

$$(BC):\begin{cases}x=1+t\\y=9-2t\end{cases}$$

et donc on a

$$M(1+t,9-2t)$$

sur la droite (BC).

On a :

$$\text{Aire } \Delta IBM=\frac{1}{12}\text{ Aire } \Delta ABC$$

avec

$$\text{Aire } \Delta IBM=\left|\frac{1}{2}\det\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IM}\right|$$

avec

$$\overrightarrow{IB}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 13-2t \end{pmatrix}$$

On a : Aire $\Delta IBM = \left| \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} 9 & 1+t \\ -3 & 13-2t \end{matrix} \right| \right| = \frac{1}{2} \left| 9(13-2t) - (-3(t+1)) \right| = \frac{1}{2} \left| 117 - 18t + 3t + 3 \right|$
$= \frac{1}{2} \left| 120 - 15t \right|$

et donc

Aire $\Delta IBM = \frac{1}{12}$ Aire ΔABC

$\frac{1}{2} \left| 120 - 15t \right| = 10$

$\left| 120 - 15t \right| = 20$

$120 - 15t = 20$ ou $120 - 15t = -20$

$t_1 = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$ ou $t_2 = \frac{140}{15} = \frac{28}{3}$

$$M_1(\frac{23}{3}, -\frac{13}{3})$$

ou

$$M_2(\frac{31}{3}, -\frac{29}{3}).$$

On retient

$$M_1(\frac{23}{3}, -\frac{13}{3})$$

car $x_M < 8$.